Тема 5. Динамические характеристики САР. Передаточная функция, временные характеристики

Понятие о статических и динамических характеристиках

Статической характеристикой элемента системы называют зависимость выходной величины элемента от входной в установившемся состоянии.

$$y=f(x) \tag{5.1}$$

Статические характеристики могут быть линейными и нелинейными. Если уравнение (5.1) может быть представлено линейной функцией, то характеристику и элемент называют линейными. Пример линейной характеристики показан на рисунке 5.1.

Уравнение этой характеристики $y=kx$, где $k=\mathrm{tg}\alpha$ называют коэффициентом передачи элемента или звена.

Нелинейная характеристика может иметь вид, показанный на рисунке 5.2.

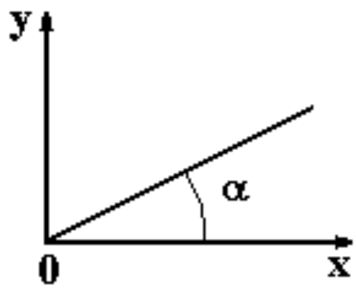

Рисунок 5.1

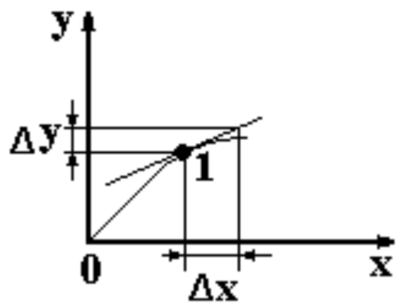

Рисунок 5.2

Для практических расчетов нелинейную характеристику заменяют линейной в требуемой области. Так, например, в окрестности точки 1 нелинейную зависимость можно заменить прямой линией, являющейся касательной в точке 1. При этом $y=kx$, где

$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Полученный при линеаризации коэффициент передачи k справедлив только для окрестностей точки 1.

Если статическая характеристика задана аналитически, то линеаризация заключается в разложении зависимости $y=f(x)$ в ряд Тейлора и отбрасывании членов второго и выше порядков малости.

Некоторые статические характеристики не поддаются линеаризации и их называют существенно нелинейными. Примером может служить статическая характеристика релейного элемента, показанная на рисунке 5.3.

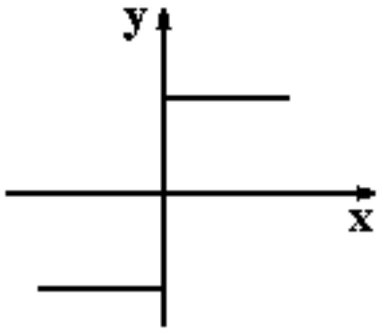

Рисунок 5.3

В некоторых случаях значение выходной величины в установившемся состоянии не связано однозначно со значением входной величины. Такие звенья не имеют статической характеристики и называются астатическими.

Если элемент системы обладает инерцией, то изменение его выходной величины под действием изменения входной происходит не мгновенно и в этом случае элемент называют динамическим.

Динамической характеристикой элемента или системы называют зависимость изменения во времени его выходной величины от изменения входной. Динамические характеристики представляют аналитически и графически. Аналитически динамические характеристики выражают дифференциальными или разностными уравнениями, а графически – в виде графиков изменения выходной величины во времени. Пример динамической характеристики инерционного элемента показан на рисунке 5.4.

Если, например, при скачкообразном изменении входной величины x выходная изменяется по экспоненте, то дифференциальное уравнение записывается следующим образом:

$$T\frac{dy}{dt}+y=kx\,.$$

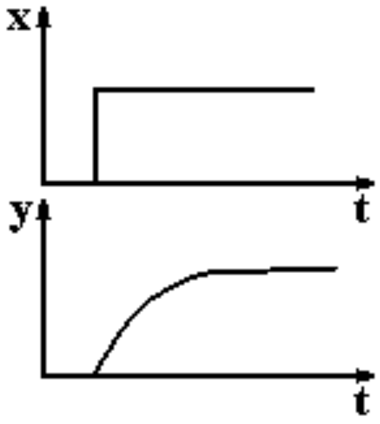

Рисунок 5.4

Количественные оценки коэффициентов этого уравнения определяются свойствами этого элемента.

Передаточные функции

В общем случае поведение любого линейного элемента или линейной САР может быть описано линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x. \tag{5.2}$$

При записи дифференциального уравнения принято выходную величину и ее производные записывать в левой части уравнения, а входную величину и ее производные – в правой части.

Входящие в уравнение коэффициенты a_i и b_i характеризуют параметры исследуемого элемента или системы и являются вещественными величинами. Порядок правой части, как правило, не превышает порядка левой ($m<n$).

С целью упрощения решения уравнения (5.2) в теории автоматического регулирования широко используется оперативный метод записи дифференциальных уравнений, в основе которого лежит условная замена оператора дифференцирования $\frac{d}{dt}$ на оператор $p=\frac{d}{dt}$. Тогда при использовании оператора p дифференциальное уравнение (5.2) в операторной форме запишется следующим образом

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0) y = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0) x. \tag{5.3}$$

Если обозначить

$$a(p) = (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0);\ b(p) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0),$$

то уравнение (5.3) запишется еще более компактно

$$a(p)y=b(p)x, \tag{5.4}$$

Выражения $a(p)$ и $b(p)$ называют соответственно выходным и входным операторными полиномами.

Из уравнения (5.4) найдем:

$$y = \frac{b(p)}{a(p)} x = W(p)x. \tag{5.5}$$

Отношение входного операторного полинома к выходному называют передаточной функцией и обозначают W(p), т.е.

$$W(p) = \frac{b(p)}{a(p)}. \tag{5.6}$$

Уравнение (5.6) представляет собой условную, более компактную форму записи исходного дифференциального уравнения (5.3).

В практических расчетах обычно используют передаточную функцию в форме изображения Лапласа.

Передаточной функцией в форме изображения Лапласа называют отношение изображения выходной величины $y(p)$ к изображению входной величины $x(p)$ при нулевых начальных условиях. Записывают ее следующим образом

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0)}{(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0)}, \tag{5.7}$$

где p уже не оператор дифференцирования, а комплексное число $p = \alpha \pm j\omega$.

Сравнивая выражения (5.6) и (5.7) отметим, что передаточные функции в операторной форме и в форме изображения Лапласа совпадают. Под нулевыми начальными условиями подразумевается, что в момент нанесения возмущения объект или система находились в установившемся состоянии.

Таким образом, для нахождения передаточной функции устройства по какому-либо воздействию, необходимо:

1) Записать дифференциальное уравнение устройства в операторной форме.

2) Разделить операторный полином правой части дифференциального уравнения на операторный полином левой части.

Проиллюстрируем это правило, найдя передаточные функции рассмотренных нами ранее объектов.

Пример 1. Резервуар со свободным стоком.
Его дифференциальное уравнение

$$T\frac{dy}{dt} + y = kx.$$

Операторная форма этого уравнения

$$Tpy(p) + y(p) = kx(p),$$

или

$$(Tp + 1)\, y(p) = kx(p),$$

откуда

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{k}{Tp + 1}\,.$$

Пример 2. Резервуар с выходным насосом.
Его дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = kx\,.$$

Операторная форма этого уравнения

$$py(p) = kx(p),$$

откуда

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{k}{p}\,.$$

Использование понятия передаточной функции позволяет формально разделить характеристики устройства и его сигналы и изображать исследуемое устройство в виде прямоугольника, внутри которого записывается обозначение передаточной функции, как это показано на рисунке 5.4.

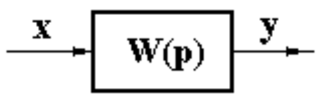

Рисунок 5.4

Стрелками на рисунке указывается направление передачи воздействия через это устройство. Такой рисунок называется структурной схемой устройства.

На основании структурной схемы можем записать $y=W(p)x$, если передаточная функция $W(p)$ записана в операторной форме, или $y(p)=W(p)x(p)$, если передаточная функция записана в форме изображений.

Если требуется, то внутри прямоугольника можно записать выражение передаточной функции.

Временные характеристики

Из предыдущего следует, что реакцию САР либо любого ее элемента, т.е. изменение во времени выходной величины при изменении входной, можно получить либо аналитически, путем решения дифференциального уравнения САР, либо экспериментально, путем воздействия на систему или ее элементы возмущениями определенного вида, называемыми типовыми.

Переходная характеристика.

На практике для определения динамических характеристик различных устройств наибольшее распространение получил метод снятия их переходных характеристик путем экспериментального определения изменения во времени выходной величины при единичном ступенчатом изменении входной величины. Единичную ступенчатую функцию принято обозначать через 1(t) и записывать следующим образом

$$x(t) = 1(t) = \begin{cases} 0 & при \quad t < 0 \\ 1 & при \quad t \geq 0 \end{cases}$$

График этой функции показан на рисунке 5.5.

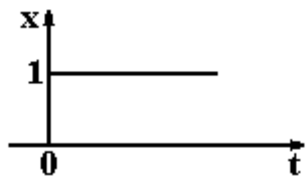

Рисунок 5.5

При подаче на вход устройства единичного воздействия, его состояние покоя нарушается и возникает переходный процесс изменения выходной величины. Вид (график) переходного процесса определяется только параметрами устройства и полностью характеризует его динамические свойства.

График переходного процесса на выходе устройства, возникающего при подаче на его вход единичного ступенчатого воздействия $1(t)$, называют переходной характеристикой и обозначают $h(t)$. Аналитическое выражение переходной характеристики называют переходной функцией.

Рассмотрим в качестве примера переходную характеристику резервуара со свободным стоком жидкости. Его уравнение $T\frac{dy}{dt} + y = kx$, решением которого, при $x(t)$=1(t) является уравнение $y(t)=k(1\text{-}e^{-t/T})$, представляющее собой уравнение экспоненты, график которой показан на рисунке 5.6.

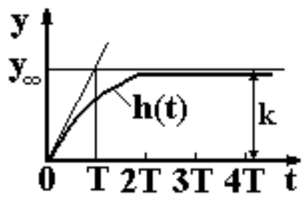

Рисунок 5.6

Значение, к которому стремится выходная величина после нанесения воздействия, численно равно коэффициенту передачи объекта k. Действительно, т.к. коэффициент передачи определяется выражением $k=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то при $x(t)$ = 1(t) получаем $k = y_\infty/1 = y_\infty$.

Касательная к началу переходной характеристики пересекает асимптотическое значение выходной величины через время, равное постоянной времени объекта. Физически постоянная времени экспоненциального процесса изменения выходной величины представляет то время, через которое эта величина достигла бы своего конечного значения, если бы она изменялась с постоянной скоростью, равной скорости ее изменения в начальный момент. В действительности переходной процесс по экспоненте заканчивается при $t\to\infty$. Практически принимают, что переходный процесс заканчивается через время t=3T, когда $y(t)=0{,}95y_\infty$. Иногда принимают, что переходный процесс заканчивается через t=4T, когда $y(t) = 0{,}98y_\infty$.

Из переходной характеристики резервуара со свободным стоком жидкости следует, что после нанесения входного воздействия выходная величина самостоятельно стремится к новому установившемуся значению. Объекты, в которых выходная величина после нанесения воздействия самостоятельно принимает новое установившееся значение называют статическими или объектами с самовыравниванием.

Рассмотрим в качестве второго примера переходную характеристику резервуара с выходным насосом. Его уравнение $\dfrac{dy}{dt}=kx$, из которого следует, что он не имеет статической характеристики.

При единичном ступенчатом входном воздействии выходная величина определяется уравнением $y(t)=kt$ и переходная характеристика имеет вид, показанный на рисунке 5.7. Из графика переходной характеристики следует, что после нанесения входного воздействия выходная величина будет неограниченно изменяться во времени. Такие объекты называют астатическими или объектами без самовыравнивания.

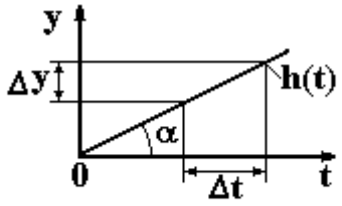

Рисунок 5.7

$$k = \frac{tg\alpha}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t \Delta x}\left[\frac{ед.вых.вел.}{ед.времени \times ед.вх.вел.}\right]$$

Для астатических объектов коэффициент передачи определяется как отношение установившегося значения скорости изменения выходной величины к величине возмущения

Кривая разгона.

Если ступенчатое возмущающее воздействие на входе объекта отличается от единичного и при $t \geq 0$ равно x_0, то полученную динамическую характеристику объекта называют кривой разгона. Кривая разгона для резервуара со свободным стоком показана на рисунке 5.8. Выходная величина в этом случае изменяется по закону $y(t) = h(t) \cdot x_0$, откуда следует, что кривая разгона, как и переходная характеристика, полностью характеризует динамические свойства объекта.

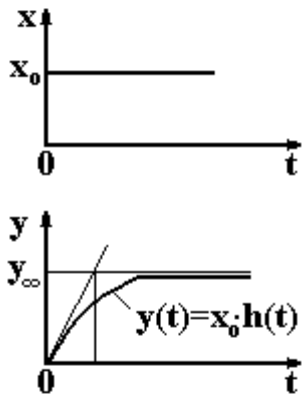

Рисунок 5.8

Импульсная переходная функция (весовая функция).

Функция, описывающая реакцию системы на воздействие в виде дельта-функции, при нулевых начальных условиях, называется импульсной переходной функцией или весовой функцией и обозначается $k(t)$. Физически дельта-функцию можно представить как очень узкий импульс, ограничивающий единичную площадь (рисунок 5.9) и записать

$$\delta(t)=\begin{cases}0, \text{при } t \neq 0\\ 1, \text{при } t=0.\end{cases}$$

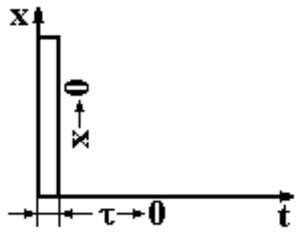

Рисунок 5.9

Так как при $\tau \to 0$ единичный импульс имеет высоту, стремящуюся к бесконечности, то его можно рассматривать как производную единичного ступенчатого воздействия и на этом основании получить выражение для импульсной функции

$$k=\frac{dh(t)}{dt} \tag{5.8}$$

В свою очередь, для дельта-функции справедливы следующие соотношения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0).$$

Доказательством этих формул является то, что дельта-функция равна нулю везде, за исключением значения t=0. Импульсная переходная функция может быть найдена как оригинал, изображением которого служит передаточная функция устройства, либо по формуле (2.15), если известно аналитическое выражение переходной характеристики устройства. Найдем весовую функцию для резервуара со свободным стоком. Передаточная функция резервуара

$$W(p)=\frac{k}{Tp+1}=\frac{k}{T}\frac{1}{(p+1/T)}.$$

По таблице преобразований Лапласа находим

$$k(t)=\frac{k}{T}e^{-t/T}.$$

График этой функции показан на рис. 5.10.

Для резервуара со свободным стоком известно аналитическое выражение для переходной характеристики $h(t)$

$$h(t) = k(1 - e^{-t/T}).$$

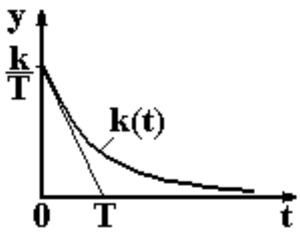

Рисунок 5.10

Поскольку $k(t)=h`(t)$, получим

$$k(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T},$$

что совпадает с выше определенным ее выражением.